**Licenciaturas en Matemáticas y en Computación, U. de Guanajuato.**
**Tercer examen parcial de Álgebra Lineal II: Forma Canónica de Jordan.**
**Viernes 16 de noviembre de 2012.**
**Entregar el martes 20 de noviembre de 2012 en el Cubículo C5 (Cimat) a más tardar a las 11 am. Son 10 problemas.**

A lo largo del examen, $K$ denotará un campo; $E$, un espacio vectorial sobre $K$ de dimensión $n$ y $f \in End(E)$ un endomorfismo de $E$. Los polinomios característico y mínimo de $f$ se denotarán, respectivamente, por $p_f(x)$ y $m_f(x) \in K[x]$. Para un vector $u \in E$, $m_u(x) \in K[x]$ denotará al polinomio mínimo de $f$ en $u$.

1. Demuestra que $m_u(x)$ divide a $m_f(x)$, para todo $u \in E$.

Supongamos que $p_f(x) = (x-\lambda)^n$ y que $m_f(x) = (x-\lambda)^s$, para alguna $s$ tal que $1 \leq s \leq n$. Sean $u_1, \ldots, u_k \in E = \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^s$ vectores cuyas clases $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_k}$ forman una base del espacio cociente

$$\mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^s / \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^{s-1}.$$

2. Demuestra que $m_{u_i}(x) = m_f(x) = (x-\lambda)^s$, para todo $i = 1, \ldots, k$ (Sugerencia: utiliza el Ejercicio 1).
3. Para cada $i = 1, \ldots, k$, demuestra que los vectores

   $$\mathbf{B_i} = \{u_i, (f-\lambda I)u_i, \ldots, (f-\lambda I)^{s-1}u_i\}$$

   son linealmente independientes y forman una base de un subespacio $f$-cíclico de dimensión $s$ (Sugerencia: utiliza el Ejercicio 2 de la Tarea 7). Se tiene en particular que $(f-\lambda I)^t u_i \neq 0$, para todo $t = 1, \ldots, s-1$ y que $(f-\lambda I)^s u_i = 0$.
4. Demuestra que $u_1, \ldots, u_k$ son linealmente independientes.
5. Demuestra que los vectores $(f-\lambda I)u_1, \ldots, (f-\lambda I)u_k$ pertenecen a $\mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^{s-1}$ y que sus clases $\overline{(f-\lambda I)u_1}, \ldots, \overline{(f-\lambda I)u_k}$ en

   $$\mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^{s-1} / \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^{s-2}$$

   son linealmente independientes.
6. Concluye que los vectores $\{(f-\lambda I)u_1, \ldots, (f-\lambda I)u_k\} \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda I)^{s-1}$ son linealmente independientes (exactamente del mismo modo en que la condición del inciso 1 implica la conclusión del inciso 4).

Supongamos ahora que el polinomio mínimo de $f$ se descompone en factores lineales en $K[x]$:

$$m_f(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_r)^{s_r}, \; \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j.$$

7.1. Demuestra que $f$ es diagonalizable si y sólo si $s_1 = \cdots = s_r = 1$.

7.2. Si $s_1 = \cdots = s_r = 1$, demuestra que la forma canónica de Jordan de $f$. es la matriz diagonal que representa a $f$. (Sugerencia: Procede con cada subespacio invariante $E^i = \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i I)$. Utiliza el hecho –probado en clase– de que los vectores en la "matriz"de la página 175 del texto de Castellet y Llerena forman una base de $E$ y que la matriz de $f$ en esa base está en forma canónica de Jordan.)

Sean $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ y

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a $f$ en alguna base (es la matriz del segundo examen parcial).

8.1. Calcula la forma canónica de Jordan $J_A$ de $A$.

8.2. Calcula una base $\mathbf{B}$ tal que $[f]_{\mathbf{B}} = J_A$ y una matriz de cambio de base $Q$ tal que $J_A = Q^{-1}AQ$.